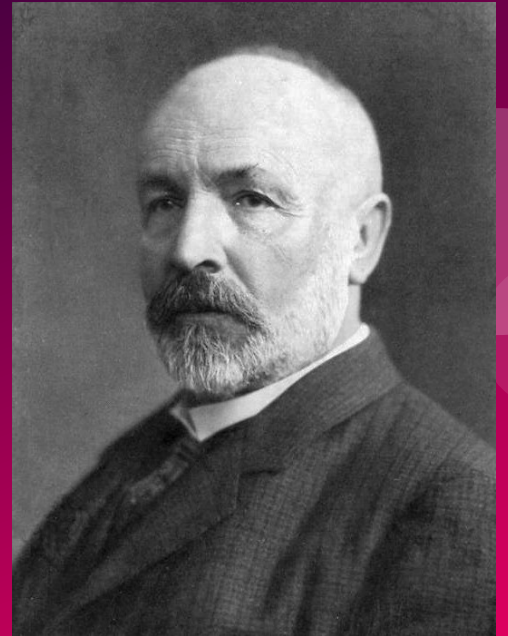


Georg Cantor und die Frage der Unendlichkeit

36. Fachtagung Physik &
Kosmologie
05.11.2022

Josua Göcking
Josua.Goecking@sci-faith.de



Gliederung

- Leben
- Werk
 - Stand der Mathematik vor Cantor
 - Cantors Mengenlehre
 - Antinomien und Kontinuumshypothese
 - Würdigung und weitere Forschung
- Metaphysik und Theologie
 - Cantor und die Undendlichkeit
 - Cantors Glaube
 - Cantors Überzeugungen im Lichte neuer Erkenntnisse

Leben

- * 3. März 1845 in St. Petersburg
- Eltern: Georg Woldemar Cantor und Maria geb. Böhm
- Umzug nach Frankfurt am Main wegen Lungenkrankheit des Vaters
- Bildung an Privatschulen und der heutigen TU Darmstadt
- Leidenschaft für Mathematik
- Ab 1862 Studium in Zürich
- 1863 Tod des Vaters

Berlin

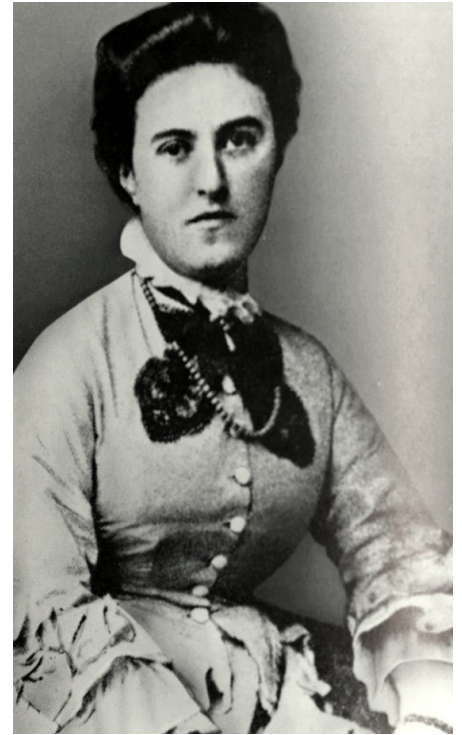
- Wechsel an die Universität Berlin
- Weierstraß, Kronecker und Kummer sind Zeitgenossen
- 1867 Promotion an der Universität Berlin
- Gibt Mathematik Unterricht am Gymnasium



Georg Cantor um 1870

Halle

- 1869 Habilitation in Halle
- 1872 Professur in Halle
- 1874 Heirat Vally Cantor geb. Guttmann
- Gemeinsam bekommen sie sechs Kinder
- Cantor bleibt in Halle für den Rest seines Lebens



Vally Cantor

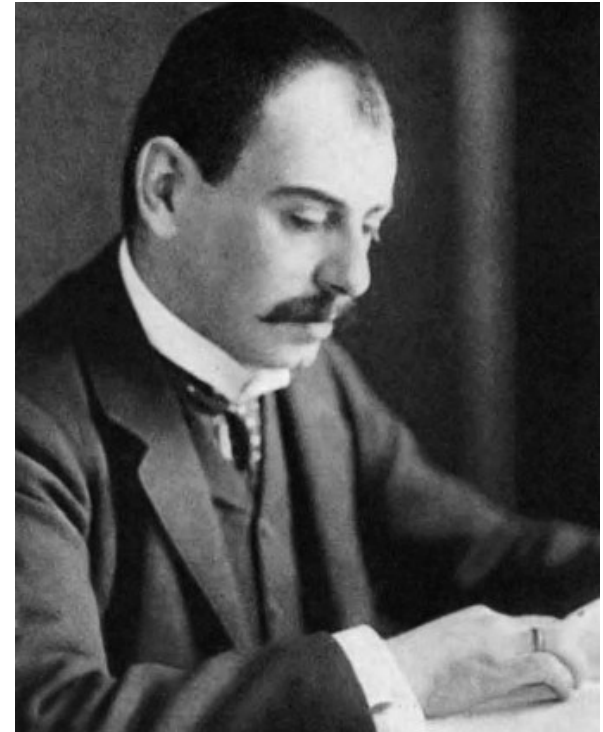
Arbeit

- Lehrte von 1869 – 1913
- Arbeiten zu unterschiedlichen Gebieten insb. Mengentheorie
- War sich seiner revolutionären Ideen bewusst
- Kronecker wurde zu seinem größten Gegner
- Er beschäftigte sich viel mit Metaphysik und Theologie
- Ab 1884 häufige Erkrankung an Depressionen
- 6. Januar 1918 stirbt Cantor an einem Herzversagen

Späte Würdigung

*“Mit großem Schmerz erfahre ich,
dass Ihr Mann gestorben ist. Ihre
Trauer
teilt die ganze mathematische Welt.
Er gehörte zu den größten und
genialsten Mathematikern aller Länder
und Zeiten.”*

Edmund Landau in einem Kondolenzbrief an Vally Cantor



Edmund Landau

Mathematik vor Cantor

- Unendlichkeit war bereits seit der Antike ein Streitthema
- Betrachtete das Unendliche als potential Unendlich
- Mathematische Aussagen deuten auf eine objektive Wahrheit
- Gutberlet und andere christliche Theologen halten dies für inkorrekt
- Leibniz und Bolzano sind auch dieser Meinung
- Ansonsten ist das aktual Unendliche sehr umstritten
- Leopold Kronecker ist einer der größten Gegner solcher Thesen

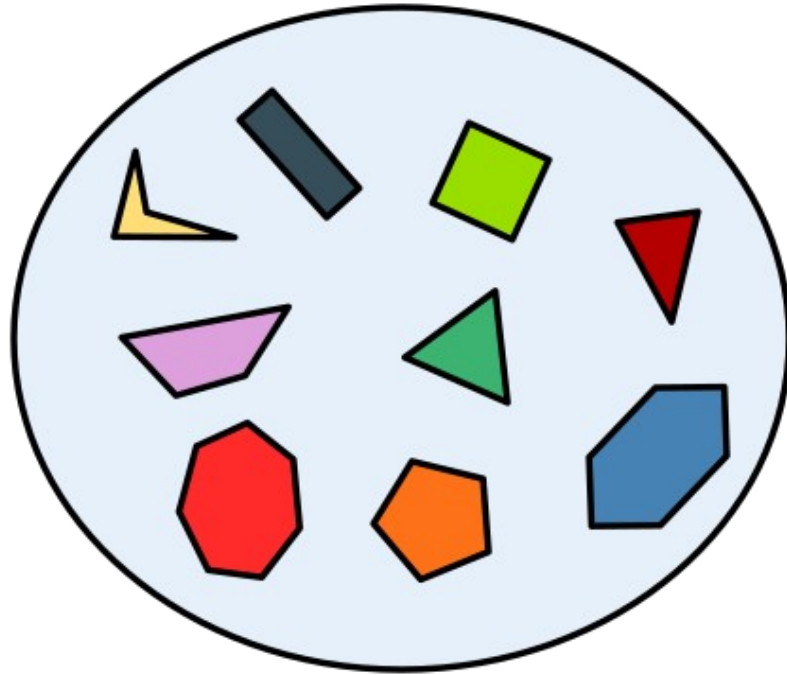
Cantors Mengenlehre

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Cantors Mengenlehre



Menge von Vielecken

Cantors Mengenlehre

Definition: Zwei Mengen M und N nennen wir äquivalent und bezeichnen dies mit $M \sim N$ oder $N \sim M$ wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig in eine derartige Beziehung zueinander zu setzen, dass jedem Element von ihnen ein und nur ein Element der anderen entspricht.

Beispiel:

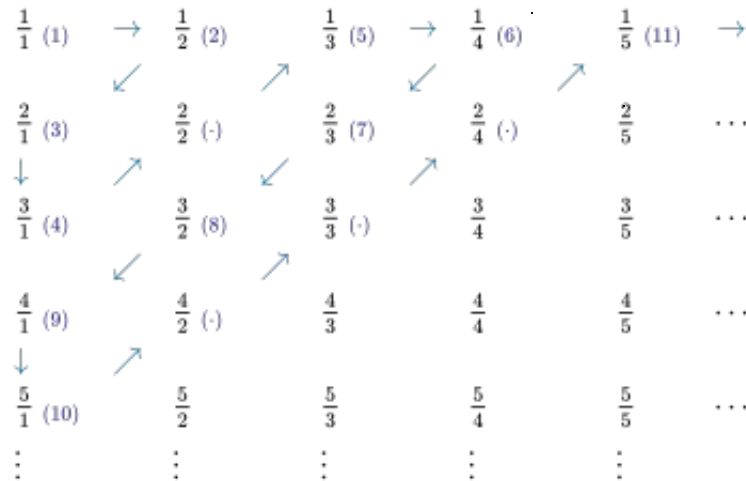
- Kavallerie: Menge der Pferde ist äquivalent zur Menge der Reiter

Definition: Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie der Menge N der natürlichen Zahlen äquivalent ist.

Cantors Mengenlehre

Satz 1: *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis: Erfolgt durch Diagonalverfahren:



Cantors Mengenlehre

Satz 2: *Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

Beweis: Erfolgt durch das zweite Diagonalverfahren:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots \\ f(2) &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots \\ f(3) &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots \\ f(4) &= 0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Liste aller reellen Zahlen
im Intervall $[0, 1]$

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \color{red}{5} 0 0 0 \dots \\ f(2) &= 0, 7 \color{blue}{5} 0 0 \dots \\ f(3) &= 0, 3 3 \color{green}{3} 3 \dots \\ f(4) &= 0, 1 4 1 \color{red}{5} \dots \\ &\vdots \\ x &= 0, \color{red}{4} \color{blue}{4} \color{green}{5} \color{red}{4} \dots \end{aligned}$$

Erzeuge neue reelle Zahl,
die unterschiedlich ist

Cantors Mengenlehre

Definition: Ist die Menge M äquivalent einer Teilmenge der Menge N , während N keiner Teilmenge von M äquivalent ist, so nennt man die Kardinalzahl m von M kleiner als die Kardinalzahl n von N .

Man sagt auch n ist größer als m . Mit den üblichen Zeichen schreibt man in diesem Falle $m < n$ oder $n > m$.

→ Kardinalszahl des Kontinuums ist größer als die Kardinalszahl einer abzählbaren Menge.

Satz 3: Zu jeder beliebigen Menge M gibt es eine Menge von größerer Mächtigkeit (Kardinalszahl), und zwar die Menge aller Teilmengen von M .

→ Es gibt keine größte Mächtigkeit aber eine kleinste unendliche transfinite Kardinalzahl $\aleph$ (Aleph)

Antinomien

1. Die Menge aller Mengen

→ Menge aller Teilmengen hat eine größere Kardinalszahl, ist aber selbst Teilmenge und hat damit eine kleinere Kardinalszahl

2. Die Menge aller sich nicht selbst enthaltenen Mengen

→ Enthält diese Menge sich selbst?

→ Beispiel: Der Barbier ist der, der genau die rasiert, welche sich nicht selbst rasieren. Rasiert der Barbier sich selbst?

- Auflösung durch Axiomatisierung der Mengentheorie (Zermelo)

Die Kontinuumshypothese

- Kardinalszahl für abzählbar unendliche Mengen ist kleiner als die des Kontinuums
- Gibt es eine Menge mit einer Kardinalszahl dazwischen?
- Cantors Vermutung: Nein.
- Beweis war eines der um 1900 formulierten Jahrhundertprobleme
- Gödel: Kann nicht widerlegt werden.
- 1963: P.J. Cohen: Kann nicht bewiesen werden

Kritik und Würdigung

- David Hilbert:

“Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.”



- Henri Poincaré:

“Spätere Generationen werden die Mengenlehre als eine Krankheit ansehen, von welcher man sich erholt hat.”



Weitere Forschung

- Grundlagenstreit zwischen Formalisten und Intuitionisten
- Hilbert wollte kompletten Formalismus: Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit
- Kurt Gödel: Unvollständigkeitssatz → Vollständigkeit ist nicht erfüllt
- Alan Turing: Halteproblem zeigt, dass Entscheidbarkeit nicht gegeben ist.



Kurt Gödel

Cantor und die Unendlichkeit

- Cantor hielt das aktual Unendliche für tatsächlich existent:
“Das Aktual-Unendliche tritt in drei Kontexten auf: Erstens wenn es in seiner komplettesten Form realisiert ist, in einem komplett außerweltlichem Wesen, in Deo, was ich das absolut Unendliche oder einfach das Absolute nenne; Zweitens wenn es in der kontingenten, geschaffenen Welt erscheint; Drittens wenn der Verstand es erfasst, in Abstracto, als eine mathematische Größe, Zahl oder Form.”

Cantors Glaube

- Zeit seines Lebens Lutheraner
- Viel Austausch mit katholischen Theologen und Philosophen
- Überzeugt von der Wahrheit der Schöpfungsgeschichte
- Sah in jeder Erkenntnis eine tiefere metaphysische Bedeutung
- Metaphysik ist unzerreißbar mit Theologie verbunden
- Lebte seine Überzeugungen und gestand Fehler ein

Cantors Überzeugungen im Lichte neuer Erkenntnisse

1. Neue Erkenntnisse der Physik setzen die Annahme aktual unendlicher Größen im Universum in Zweifel:

- Quantenmechanik: Gequantelte Größen statt Kontinuum
- Ausdehnendes Universum → endliche Größe

2. Antinomien

- Aufhebung durch Axiomatisierung
- Dennoch scheint mathematisch-metaphysische Beweisführung Cantors für widerlegt.

Cantors Überzeugungen im Lichte neuer Erkenntnisse

- Gerhard Kowalewski an Cantor:

“an eine Stelle aus den Reden Salomons bei der Einweihung des Tempels (2. Chronik 6, Vers 18 und 1. Könige 8 Vers 27): “Denn sollte in Wahrheit Gott bei den Menschen auf Erden wohnen? Siehe der Himmel und aller Himmel Himmel können dich nicht fassen.” “Aller Himmel Himmel” ‘- erinnert das nicht stark an “aller Mengen Menge”? Was Salomo sagt, lautet, ins Mathematische übersetzt: Gott, das höchste Unendliche, kann überhaupt nicht erfasst werden, weder durch die Menge noch durch die Menge aller Mengen.”

→ Natur ist eine Widerspiegelung Gottes, aber keine Vollkommene

Quellen

- [1] Herbert Meschkowski: *Georg Cantor, Leben, Werk und Wirkung*. Vieweg, Braunschweig 1983.
- [2] Andor Kertész. Bearb. von Manfred Stern: *Georg Cantor, 1845 - 1918 : Schöpfer der Mengenlehre*. Halle/Saale : Deutsche Akademie d. Naturforscher Leopoldina, 1983.
- [3] Walter Purkert, Hans Joachim Ilgauds: *Georg Cantor 1845–1918*. Birkhäuser, Basel/ Boston/ Stuttgart 1987.
- [4] Derek Muller / Veritasium: *Math's Fundamental Flaw | Veritasium*. [Video]. YouTube.
<https://www.youtube.com/watch?v=HeQX2HjkcNo>

Georg Cantor und die Frage der Unendlichkeit

36. Fachtagung Physik &
Kosmologie
05.11.2022

Josua Göcking
Josua.Goecking@sci-faith.de

